

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ Й НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять за курсом
«Техніка та планування експерименту»

**Тема: «Перехід до фізичних змінних в математичних моделях із двома
кодованими факторами»**

для студентів спеціалізації:
141.13 «Нетрадиційні та відновлювані джерела енергії»,
141.14 «Техніка та електрофізика високих напруг»

Затверджено
на засіданні кафедри
інженерної електрофізики
Протокол №8 від 05.02.2019

Харків НТУ «ХПІ» 2019

Методичні вказівки до практичних занять за курсом «Техніка та планування експерименту». Тема: «Перехід до фізичних змінних в математичних моделях із двома кодованими факторами» : для студентів спеціалізації: «Нетрадиційні та відновлювані джерела енергії», «Техніка та електрофізика високих напруг» / уклад.: В.Є. Марценюк, О.О. Петков. – Харків : НТУ «ХПІ», 2019. - 11 с.

Укладачі: В.Є. Марценюк
О.О. Петков

Самостійне електронне видання

Кафедра інженерної електрофізики

ПЕРЕХІД ДО ФІЗИЧНИХ ЗМІННИХ В МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЯХ ІЗ ДВОМА КОДОВАНИМИ ФАКТОРАМИ

При проведенні досліджень і обробці їхніх результатів з використанням методів планування наукових експериментів одержують математичну модель відгуку (рівняння регресії), у якій незалежні змінні (фактори) представлені в кодованому вигляді. Безпосереднє використання таких моделей незручно, тому що в практичній діяльності, ми найчастіше, використовуємо фізичні змінні. Тому отримані рівняння регресії доцільно перетворити до виду, який допускає використання фізичних змінних.

1 Перетворення лінійної моделі

У результаті проведення повного факторного експерименту типу ПФЕ 2^2 у загальному випадку може бути отримана наступна математична модель досліджуваного вихідного параметра (відгуку) [1]

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2, \quad (1)$$

де y – досліджуваний вихідний параметр; b_0, b_1, b_2, b_{12} – числові коефіцієнти; x_1, x_2 – кодовані змінні (фактори).

Зв'язок кодованих і фізичних змінних встановлюється співвідношенням виду [1]

$$x_i = \frac{X_i - \bar{X}_i}{h_i}, \quad (2)$$

де x_i – значення i -ої кодової змінної; X_i – поточне значення i -ої фізичної змінної; \bar{X}_i – середнє значення i -ої фізичної змінної; h_i – інтервал зміни i -ої фізичної змінної.

Підставивши співвідношення (2) у вираз (1) отримаємо

$$y = b_0 + b_1 \frac{X_1 - \bar{X}_1}{h_1} + b_2 \frac{X_2 - \bar{X}_2}{h_2} + b_{12} \frac{X_1 - \bar{X}_1}{h_1} \frac{X_2 - \bar{X}_2}{h_2}. \quad (3)$$

Спростимо вираз (3) шляхом алгебраїчного перетворення дробових доданків

$$\begin{aligned}
y &= b_0 + \frac{b_1}{h_1} X_1 - \frac{b_1}{h_1} \overline{X_1} + \frac{b_2}{h_2} X_2 - \frac{b_2}{h_2} \overline{X_2} + \frac{b_{12}}{h_1 h_2} (X_1 - \overline{X_1})(X_2 - \overline{X_2}) = \\
&= b_0 + \frac{b_1}{h_1} X_1 - \frac{b_1}{h_1} \overline{X_1} + \frac{b_2}{h_2} X_2 - \frac{b_2}{h_2} \overline{X_2} + \frac{b_{12}}{h_1 h_2} (X_1 X_2 - X_1 \overline{X_2} - X_2 \overline{X_1} + \overline{X_1} \overline{X_2}) = \\
&= b_0 + \frac{b_1}{h_1} X_1 - \frac{b_1}{h_1} \overline{X_1} + \frac{b_2}{h_2} X_2 - \frac{b_2}{h_2} \overline{X_2} + \frac{b_{12}}{h_1 h_2} X_1 X_2 - \frac{b_{12}}{h_1 h_2} \overline{X_2} X_1 - \\
&\quad - \frac{b_{12}}{h_1 h_2} \overline{X_1} X_2 + \frac{b_{12}}{h_1 h_2} \overline{X_1} \overline{X_2}.
\end{aligned} \tag{4}$$

В отриманому виразі приведемо подібні члени

$$\begin{aligned}
y &= \left(b_0 - \frac{b_1}{h_1} \overline{X_1} - \frac{b_2}{h_2} \overline{X_2} + \frac{b_{12}}{h_1 h_2} \overline{X_1} \overline{X_2} \right) + \left(\frac{b_1}{h_1} - \frac{b_{12}}{h_1 h_2} \overline{X_2} \right) X_1 + \\
&\quad + \left(\frac{b_2}{h_2} - \frac{b_{12}}{h_1 h_2} \overline{X_1} \right) X_2 + \frac{b_{12}}{h_1 h_2} X_1 X_2.
\end{aligned} \tag{5}$$

У виразі (5) введемо наступні позначення:

$$B_0 = b_0 - \frac{b_1}{h_1} \overline{X_1} - \frac{b_2}{h_2} \overline{X_2} + \frac{b_{12}}{h_1 h_2} \overline{X_1} \overline{X_2}; \tag{6}$$

$$B_1 = \frac{b_1}{h_1} - \frac{b_{12}}{h_1 h_2} \overline{X_2}; \tag{7}$$

$$B_2 = \frac{b_2}{h_2} - \frac{b_{12}}{h_1 h_2} \overline{X_1}; \tag{8}$$

$$B_{12} = \frac{b_{12}}{h_1 h_2}. \tag{9}$$

Тоді вираз (5) може бути представлений в наступному вигляді

$$y = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2 + B_{12} X_1 X_2, \tag{10}$$

де B_0, B_1, B_2, B_{12} – числові коефіцієнти, визначені за співвідношеннями (6) – (9); X_1, X_2 – поточні значення фізичних змінних.

Приклад №1. Для визначення навантажувальної здатності твердотільних об'ємних резисторів в імпульсних режимах експлуатації був проведений експеримент виду ПФЕ 2², вихідні дані якого наведені в табл. 1.

Таблиця 1 – Кодування факторів

Найменування фактора	Позначення фактора, розмірність	Кодоване позначення фактора	Інтервал, h_i	Рівні		
				-1	0	+1
1	2	3	4	5	6	7
Температура зовнішнього середовища	$T, ^\circ\text{C}$	x_1	20	60	80	100
Максимальне значення імпульсу напруги, що прикладається	$U_{\max}, \text{кВ}$	x_2	10	20	30	40

У результаті обробки експериментальних даних отримане наступне рівняння регресії

$$N = 10000 - 320x_1 - 535x_2 - 208x_1x_2, \quad (11)$$

де N – число імпульсів струму, що протікає у резисторі, які не викликають зміни величини опору резистора більш ніж на 10%.

Зробимо перехід до фізичних змінних. Виходячи з виразу (2) і даних табл. 1, зв'язок кодованих і фізичних значень факторів має вигляд

$$x_1 = \frac{T - 80}{20}, \quad x_2 = \frac{U_{\max} - 30}{10}. \quad (12)$$

Підставимо співвідношення (12) у вираз (11)

$$N = 10000 - 320 \cdot \frac{T - 80}{20} - 535 \cdot \frac{U_{\max} - 30}{10} - 208 \cdot \frac{T - 80}{20} \cdot \frac{U_{\max} - 30}{10}. \quad (13)$$

Вираз (13) містить тільки фізичні змінні T и U_{\max} , і може бути використаним для подальших розрахунків. Однак він не зручний для проведення аналізу. Щоб перейти до виду (10) скористаємося співвідношеннями (6) - (9).

$$B_0 = 10000 - \frac{-320}{20} \cdot 80 - \frac{-535}{10} \cdot 30 + \frac{-208}{20 \cdot 10} \cdot 80 \cdot 30 = 10389; \quad (14)$$

$$B_1 = \frac{-320}{20} - \frac{-208}{20 \cdot 10} \cdot 30 = 15,2; \quad (15)$$

$$B_2 = \frac{-535}{10} - \frac{-208}{20 \cdot 10} \cdot 80 = 29,7; \quad (16)$$

$$B_{12} = \frac{-208}{20 \cdot 10} = -1,04. \quad (17)$$

Тоді математична модель для фізичних змінних приймає вигляд

$$N = 10389 + 15,2 \cdot T + 29,7 \cdot U_{\max} - 1,04 \cdot T \cdot U_{\max}. \quad (18)$$

У виразі (18) розмірність змінних відповідає їхній розмірності при кодуванні (див. табл.1), тобто змінні підставляються: T у °С, U_{\max} у кВ. Правильність виконання переходу до фізичних змінних перевіряється збігом результатів обчислення по виразах (11) і (18) у точках факторного простору, у яких проводився експеримент.

2 Перетворення моделі другого порядку

У результаті проведення експерименту за планом ортогонального центрального композиційного планування (ОЦКП) із ядром ПФЕ 2^2 у загальному випадку може бути отримана наступна математична модель досліджуваного вихідного параметра (відгуку) [2]

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2, \quad (19)$$

де y – досліджуваний вихідний параметр; $b_0, b_1, b_2, b_{12}, b_{11}, b_{22}$ – числові коефіцієнти; x_1, x_2 – кодовані змінні (фактори).

Підставивши співвідношення (2) у вираз (19) отримаємо

$$y = b_0 + b_1 \frac{X_1 - \overline{X}_1}{h_1} + b_2 \frac{X_2 - \overline{X}_2}{h_2} + b_{12} \frac{X_1 - \overline{X}_1}{h_1} \frac{X_2 - \overline{X}_2}{h_2} +$$

$$+ b_{11} \left(\frac{X_1 - \overline{X}_1}{h_1} \right)^2 + b_{22} \left(\frac{X_2 - \overline{X}_2}{h_2} \right)^2. \quad (20)$$

Спростимо вираз (20) шляхом алгебраїчного перетворення дробових доданків і піднесення у квадрат останніх двох членів. Перетворення лінійних членів повністю відповідає виразу (4). Тому перетворимо лише квадратичні члени виразу (20)

$$b_{11} \left(\frac{X_1 - \overline{X}_1}{h_1} \right)^2 = \frac{b_{11}}{h_1^2} X_1^2 - 2 \frac{b_{11}}{h_1^2} X_1 \overline{X}_1 + \frac{b_{11}}{h_1^2} \overline{X}_1^2; \quad (21)$$

$$b_{22} \left(\frac{X_2 - \overline{X}_2}{h_2} \right)^2 = \frac{b_{22}}{h_2^2} X_2^2 - 2 \frac{b_{22}}{h_2^2} X_2 \overline{X}_2 + \frac{b_{22}}{h_2^2} \overline{X}_2^2. \quad (22)$$

Доповнимо (4) виразами (21) і (22). У результаті отримаємо наступний перетворений вираз для (20)

$$y = b_0 + \frac{b_1}{h_1} X_1 - \frac{b_1}{h_1} \overline{X}_1 + \frac{b_2}{h_2} X_2 - \frac{b_2}{h_2} \overline{X}_2 + \frac{b_{12}}{h_1 h_2} X_1 X_2 - \frac{b_{12}}{h_1 h_2} \overline{X}_2 X_1 -$$

$$- \frac{b_{12}}{h_1 h_2} \overline{X}_1 X_2 + \frac{b_{12}}{h_1 h_2} \overline{X}_1 \overline{X}_2 +$$

$$+ \frac{b_{11}}{h_1^2} X_1^2 - 2 \frac{b_{11}}{h_1^2} X_1 \overline{X}_1 + \frac{b_{11}}{h_1^2} \overline{X}_1^2 + \frac{b_{22}}{h_2^2} X_2^2 - 2 \frac{b_{22}}{h_2^2} X_2 \overline{X}_2 + \frac{b_{22}}{h_2^2} \overline{X}_2^2. \quad (23)$$

В отриманому виразі приведемо подібні члени

$$y = \left(b_0 - \frac{b_1}{h_1} \overline{X}_1 - \frac{b_2}{h_2} \overline{X}_2 + \frac{b_{12}}{h_1 h_2} \overline{X}_1 \overline{X}_2 + \frac{b_{11}}{h_1^2} \overline{X}_1^2 + \frac{b_{22}}{h_2^2} \overline{X}_2^2 \right) +$$

$$+ \left(\frac{b_1}{h_1} - \frac{b_{12}}{h_1 h_2} \overline{X}_2 - 2 \frac{b_{11}}{h_1^2} \overline{X}_1 \right) X_1 + \left(\frac{b_2}{h_2} - \frac{b_{12}}{h_1 h_2} \overline{X}_1 - 2 \frac{b_{22}}{h_2^2} \overline{X}_2 \right) X_2 +$$

$$+ \frac{b_{12}}{h_1 h_2} X_1 X_2 + \frac{b_{11}}{h_1^2} X_1^2 + \frac{b_{22}}{h_2^2} X_2^2. \quad (24)$$

У виразі (24) введемо наступні позначення:

$$B_0 = b_0 - \frac{b_1}{h_1} \overline{X_1} - \frac{b_2}{h_2} \overline{X_2} + \frac{b_{12}}{h_1 h_2} \overline{X_1 X_2} + \frac{b_{11}}{h_1^2} \overline{X_1^2} + \frac{b_{22}}{h_2^2} \overline{X_2^2}; \quad (25)$$

$$B_1 = \frac{b_1}{h_1} - \frac{b_{12}}{h_1 h_2} \overline{X_2} - 2 \frac{b_{11}}{h_1^2} \overline{X_1}; \quad (26)$$

$$B_2 = \frac{b_2}{h_2} - \frac{b_{12}}{h_1 h_2} \overline{X_1} - 2 \frac{b_{22}}{h_2^2} \overline{X_2}; \quad (27)$$

$$B_{12} = \frac{b_{12}}{h_1 h_2}; \quad B_{11} = \frac{b_{11}}{h_1^2}; \quad B_{22} = \frac{b_{22}}{h_2^2}. \quad (28)$$

Тоді вираз (23) може бути представлений в наступному вигляді

$$y = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2 + B_{12} X_1 X_2 + B_{11} X_1^2 + B_{22} X_2^2, \quad (29)$$

де $B_0, B_1, B_2, B_{12}, B_{11}, B_{22}$ – числові коефіцієнти, визначені за співвідношеннями (25) – (28); X_1, X_2 – поточні значення фізичних змінних.

Приклад №2. Для визначення мінімальної висоти блискавковідводу, що захищає групу будівель, був проведений експеримент виду ОЦКП із ядром ПФЕ 2², вихідні дані якого наведені в табл. 2.

Таблиця 2 – Кодування факторів

Найменування фактора	Позначення фактора, розмірність	Кодоване позначення фактора	Інтервал, h_i	Рівні		
				-1	0	+1
1	2	3	4	5	6	7
X-координата розташування блискавковідводу	X, м	x_1	40	60	100	140
Y-координата розташування блискавковідводу	Y, м	x_2	20	10	30	50

У результаті обробки експериментальних даних отримане наступне рівняння регресії

$$H_{\min} = 90 + 12x_1 - 5,5x_2 + 1,9x_1x_2 + 10,8x_1^2 + 3,1x_2^2, \quad (30)$$

де H_{\min} – мінімальна висота блискавководу, що захищає групу будівель.

Зробимо перехід до фізичних змінних. Виходячи з виразу (2) і даних табл. 2, зв'язок кодованих і фізичних значень факторів має вигляд

$$x_1 = \frac{X - 100}{40}, \quad x_2 = \frac{Y - 30}{20}. \quad (31)$$

Підставимо співвідношення (31) у вираз (30)

$$H_{\min} = 90 + 12 \cdot \frac{X - 100}{40} - 5,5 \cdot \frac{Y - 30}{20} + 1,9 \cdot \frac{X - 100}{40} \cdot \frac{Y - 30}{20} + \\ + 10,8 \cdot \left(\frac{X - 100}{40} \right)^2 + 3,1 \cdot \left(\frac{Y - 30}{20} \right)^2. \quad (32)$$

Вираз (32) містить тільки фізичні змінні X і Y , і може бути використаний для подальших розрахунків. Однак він не зручний для проведення аналізу. Щоб перейти до виду (29) скористаємося співвідношеннями (25) - (28).

$$B_0 = 90 - \frac{12}{40} \cdot 100 - \frac{-5,5}{20} \cdot 30 + \frac{1,9}{40 \cdot 20} \cdot 100 \cdot 30 + \\ + \frac{10,8}{40^2} \cdot 100^2 + \frac{3,1}{20^2} \cdot 30^2 = 149,85; \quad (33)$$

$$B_1 = \frac{12}{40} - \frac{1,9}{40 \cdot 20} \cdot 30 - 2 \cdot \frac{10,8}{40^2} \cdot 100 = -1,1213; \quad (34)$$

$$B_2 = \frac{-5,5}{20} - \frac{1,9}{40 \cdot 20} \cdot 100 - 2 \cdot \frac{3,1}{20^2} \cdot 30 = -0,9775; \quad (35)$$

$$B_{12} = \frac{1,9}{40 \cdot 20} = 0,002375; \quad B_{11} = \frac{10,8}{40^2} = 0,00675; \quad B_{22} = \frac{3,1}{20^2} = 0,00775. \quad (36)$$

Тоді математична модель для фізичних змінних приймає наступний вигляд (з урахуванням округлення коефіцієнтів):

$$H_{\min} = 149,85 - 1,12 \cdot X - 0,98 \cdot Y + 0,002 \cdot X \cdot Y + 0,007 \cdot X^2 + 0,008 \cdot Y^2. \quad (37)$$

У виразі (37) розмірність змінних відповідає їхній розмірності, використовуваний при кодуванні (див. табл. 2), тобто змінні X і Y підставляються метрах. Правильність виконання переходу до фізичних змінних перевіряється збігом результатів обчислення по виразах (30) і (37) у точках факторного простору, у яких проводився експеримент.

Література

1. Беспалов В.Д. Планирование эксперимента в технике и электрофизике высоких напряжений : учеб.-метод. пособие / В.Д. Беспалов, В.В. Рудаков ; под ред. В.В. Рудакова. – Х. : НТУ "ХПИ", 2006. – 60 с.
2. Петков А.А. Ортогональное центральное композиционное планирование в технике и электрофизике высоких напряжений : учеб.-метод. пособие / А.А. Петков. – Х. : НТУ "ХПИ", 2007. – 61 с. – ISBN 978-966-593-527-8.